数理解析研究所講究録
567 巻 1985 年 1-11

On Lie algebras of vector fields on smooth orbifolds

信州大 教養　阿部孝順 (Kōjun Abe)

§1 Introduction

Pursell-Shanks [9] は，可微分で連結な多様体 M, N 上の compact support をもつ可微分ベクトル場のつくるリー環 $\mathfrak{X}_c(M)$, $\mathfrak{X}_c(N)$ の同型は，多様体 M, N の可微分同相を引起すことを示した。 Omori [8], Koriyama [5], Koriyama-Omori-Maeda [5], [6] etc. は $\mathfrak{X}(M)$ の部分環 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{X}(N)$ の部分環 $\mathfrak{g}'$ を適当に与えたときに，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ がリー環として同型ならば M, N は可微分同相であることを証明している。

ここでは，M, N が smooth connected orbifold としたとき上で述べた問題について考える。

M: connected smooth orbifold

$C^\infty(M)$: M 上の smooth function 全体

$\mathcal{D}(M)$: $C^\infty(M)$ の derivation 全体のつくるリー環

$\mathcal{D}(M)$ の元を M 上の smooth vector field と考える。 M は局所的には有限群の軌道空間であるから，M に自然な stratification が定義される。

$\mathfrak{X}(M) = \{X \in \mathfrak{D}(M) \mid X$ は strata preserving$\}$

$\mathfrak{D}_c(M) = \{X \in \mathfrak{D}(M) \mid \mathrm{supp}\, X$ は compact$\}$

$\mathfrak{X}_c(M) = \mathfrak{X}(M) \cap \mathfrak{D}_c(M)$

$\mathfrak{D}(M)$, $\mathfrak{X}(M)$ の局所的な性質については、Bierstone [4], Schwarz [10] により詳しく研究されている。smooth orbifold M, N に対しても Pursell-Shanks 型の定理が得られることが分かっている（[1], [2]）。以下では §2 で述べる条件 (C.1) ～ (C.4) をみたす $\mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}(N)$ の部分環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ について、どのようなことが分かるか、更に $\mathfrak{D}_c(M)$, $\mathfrak{D}_c(N)$ の部分環の場合について考える。

§2. $\Sigma_0(\mathfrak{g}) = \Sigma_0(\mathfrak{g}') = \phi$ の場合

以下では $\mathfrak{X}(M)$ の部分環 $\mathfrak{g}$ で次の条件をみたすものを考える (c.f. [6]).

(C.1) $\forall X \in \mathfrak{g}$ は complete.

(C.2) $\mathrm{Ad}(\exp tX)\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \quad (\forall X \in \mathfrak{g})$

(C.3) $X, Y \in \mathfrak{g}$, $-\infty < a \leq b < \infty$ ならば

$$\int_a^b \mathrm{Ad}(\exp tX) Y\, dt \in \mathfrak{g}.$$

(C.4) M の locally finite open covering $\{W_\alpha\}$ に対して、$\forall X \in \mathfrak{g}$ は $X = \sum_\alpha X_\alpha$ $(\exists X_\alpha \in \mathfrak{g}, \mathrm{supp}\, X_\alpha \subset W_\alpha)$ と表わされる。

但し M が smooth orbifold に対しても、$X \in \mathfrak{g}$ の 1-parameter family of transformations $\varphi_t = \exp tX$ が定義されて、$(\mathrm{Ad}(\varphi_t)Y)(p)$

$= (d\varphi_t)_{\varphi_t^{-1}(p)}(Y(\varphi_t^{-1}(p)))$ $(Y\in\mathfrak{g}, -\infty<t<\infty, p\in M)$.

$M \ni p$

$\mathfrak{g}_p = \{X\in\mathfrak{g} \mid X=0$ on a neighborhood of $p\}$

$\mathfrak{g}_p^\infty = \{X\in\mathfrak{g} \mid (ad(Y_1)\cdots ad(Y_k)X)(p)=0$ ($\forall$自然数 k, $Y_i\in\mathfrak{g}$)$\}$

$\mathfrak{g}^* = \{\mathfrak{m} : \mathfrak{g}$ の maximal ideal $\mid \mathfrak{m} \not\supset [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\}$

Lemma 2.1 (c.f. [6] Lemma 4.3, Lemma 3.1).

$\mathfrak{g}^* \ni \mathfrak{m}$ に対して, $\exists^1 p\in M \mid \mathfrak{m}\supset\mathfrak{g}_p$.

$\Sigma_0(\mathfrak{g}) = \{p\in M \mid X(p)=0 \quad (\forall X\in\mathfrak{g})\}$

Lemma 2.2 (c.f. [6] Lemma 4.5)

$\mathfrak{m}\in\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{m}\supset\mathfrak{g}_p$ ($^\exists p\in M-\Sigma_0(\mathfrak{g})$)

$\Rightarrow \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{g}_p^\infty$.

$\mathfrak{g}^*$ には Stone topology により位相が入いる (c.f. [5], §4). $\Sigma_0(\mathfrak{g})=\phi$ のときは, M と $\mathfrak{g}^*$ は位相同型なことが証明される.

Proposition 2.3 (c.f. [5], §5)

M, N を smooth connected orbifold, $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を (C.1) ~ (C.4) をみたす, $\mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}(N)$ の部分環で, $\Sigma_0(\mathfrak{g}) = \Sigma_0(\mathfrak{g}') = \phi$ である

とする．このとき $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ がリー環として同型ならば，M と N は位相同型である．

<u>Corollary 2.4</u> (c.f. [5], §5).

$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ が Proposition 2.3 をみたし，かつ $\mathfrak{g}$ は $C^\infty(M)$-module で $\mathfrak{g}'$ は $C^\infty(N)$-module ~~ならば~~ とする。リー環の同型 $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ が存在すれば，微分同相 $\varphi : M \to N$ で $d\varphi = \Phi$ なるものが存在する．

§3. Expansive vector fields

smooth orbifold M の各点 p に対して，有限群 Γ_p のベクトル空間 V_p への線型作用で，軌道空間 V_p/Γ_p が p の近傍と微分同相なものが存在する．

$$\alpha_p : \mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\text{restriction}} \mathfrak{X}(V_p/\Gamma_p) \cong \mathfrak{X}_{\Gamma_p}(V_p)$$

(但し $\mathfrak{X}_{\Gamma_p}(V_p)$ は V_p 上の Γ_p-equivariant smooth vector field 全体)

$\mathfrak{X}(M) \ni X$ に対して，$\alpha_p(X)$ の linear part の固有値の実部が全て正であるとき，X は p において <u>expansive</u> であるという。

$\Sigma_0(\mathfrak{g}) \ni {}^\forall p$ に対して $\mathfrak{g}$ に含まれる expansive vector field が存在するとき，$\mathfrak{g}$ は <u>性質 (E)</u> をみたすということにする．

$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ が性質(E)をみたすとき，[6] と平行な議論ができて次の結果を得る．

<u>Theorem 3.1</u>　M, N : smooth connected orbifold. $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$が条件(C.1)〜(C.4) をみたし，性質(E)をみたす$\mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}(N)$の部分環で，かつ，$\mathfrak{g}$は$C^\infty(M)$-moduleで$\mathfrak{g}'$は$C^\infty(N)$-moduleとする．このとき，リー環の同型$\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$が存在すれば，微分同相$\varphi : M \to N$で$d\varphi = \Phi$をみたすものが存在する．

S : Mの closed subset.

$\mathrm{Diff}(M; S) = \{ g \in \mathrm{Diff}(M) \mid g(S) = S \}$

$\mathfrak{X}_c(M; S) = \{ X \in \mathfrak{X}_c(M) \mid \exp tX \in \mathrm{Diff}(M; S) \ (\forall t \in \mathbb{R}) \}$

$\mathfrak{X}_c(M; S)$が性質(E)をみたすとき，Sは<u>expansive set</u> であるということにする．SがMの smooth suborbifold ならばSは expansive set である．

<u>Corollary 3.2</u>　M, Nを smooth connected orbifold でS, S'をM, Nの expansive closed subset とする．このとき，リー環の同型$\Phi : \mathfrak{X}_c(M; S) \longrightarrow \mathfrak{X}_c(N; S')$が存在すれば，微分同相$\varphi : M \to N$で$d\varphi = \Phi$をみたすものが存在する．

§4.　リー環 $\mathfrak{D}_c(M; S)$

$\mathfrak{X}_c(M)$に含まれる vector field Xに対しては，$\exp tX$が定義されるが，$\mathfrak{D}_c(M)$に含まれる vector field に対しては$\exp tX$

が定義されない．このために $\mathfrak{X}_c(M)$ の部分環よりも $\mathcal{D}_c(M)$ の部分環の構造を調べる方が難しくなる．この節では，$\mathcal{D}_c(M)$ の部分環 $\mathcal{D}_c(M;S)$ に対して §3 と同様な問題を考える．

M の subset S に対して

$$I(S)=\{f\in C^\infty(M) \mid f=0 \quad \text{on } S\}$$

$$\mathcal{D}_c(M;S)=\{X\in\mathcal{D}_c(M) \mid X(f)\in I(S) \quad (\forall f\in I(S))\}$$

<u>Theorem 4.1</u>. M, N を smooth connected orbifold，S, S' を M, N の smooth suborbifold とする．このとき，リー環の同型 $\Phi:\mathcal{D}_c(M;S)\longrightarrow\mathcal{D}_c(N;S')$ が存在すれば，微分同相 $\varphi:M\to N$ で $d\varphi=\Phi$ をみたすものが存在する．

以下この節では Th 4.1 の証明の方針について述べる．Th 4.1 の証明には $\mathcal{D}_c(M;S)$ の maximal ideal を決定することが問題になるが，このためにはまず M が finite group Γ の表現空間 V の軌道空間 V/Γ で，S が V の部分空間 V_1 の軌道空間 V_1/Γ である場合に，$\mathcal{D}_c(V/\Gamma;V_1/\Gamma)$ の maximal ideal を決定する必要がある．

$V^{(1)}=\{v\in V \mid v$ の isotropy subgroup Γ_v が V の reflection で生成される order 2 の group$\}$

Γ_1：$\{\Gamma_v \mid v\in V^{(1)}\}$ で生成される Γ の reflection subgroup.

Γ_1^1 : $\{\Gamma_v \mid v \in V^{(1)} \cap V_1\}$ で生成される Γ の reflection subgroup

$\mathbb{R}[V]_0^{\Gamma_1}$: V 上の Γ_1-invariant polynomial で定数項が 0 なもの

$\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$: $\mathbb{R}[V]_0^{\Gamma_1}$ の homogeneous minimal set of generators

$\{\theta_1, \dots, \theta_{n_1}\}$ $(n_1 \leq n)$ は $\mathbb{R}[V_1]_0^{\Gamma_1^1}$ の homogeneous minimal set of generators であるようにとれる.

$$\left.\begin{array}{l} \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \theta^1 = (\theta_1, \dots, \theta_{n_1}) : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1} \end{array}\right\} \text{polynomial map}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar\theta : V/\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \bar\theta^1 : V_1/\Gamma_1^1 \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\theta, \theta^1 \text{ の} \\ \text{orbit map.}\end{array}$$

$\bar\Gamma = \Gamma/\Gamma_1$: factor group.

Γ の V への線型作用は $\bar\Gamma$ の V/Γ_1 への作用 $\psi_0 : \bar\Gamma \times V/\Gamma_1 \longrightarrow V/\Gamma_1$, $\bar\Gamma$ の V_1/Γ_1^1 への作用 $\psi_0^1 : \bar\Gamma \times V_1/\Gamma_1^1 \longrightarrow V_1/\Gamma_1^1$ を引起す.

<u>Lemma 4.2</u>. 線型作用 $\psi : \bar\Gamma \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ で次の条件をみたすものが存在する.

(1) $\psi(\gamma, \bar\theta(x)) = \bar\theta(\psi_0(\gamma, x))$ $\quad (\gamma \in \bar\Gamma,\ x \in V/\Gamma_1)$

(2) $\psi(\gamma, \bar\theta^1(x)) = \bar\theta^1(\psi_0^1(\gamma, x))$ $\quad (x \in \bar\Gamma,\ x \in V_1/\Gamma_1^1)$

(3) $\bar\theta, \bar\theta^1$ は $\bar\Gamma$-equivariant embedding.

Lemma 4.2 により $\bar\theta$ の orbit map $\bar{\bar\theta} : V/\Gamma = (V/\Gamma_1)/\bar\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n/\bar\Gamma$ は embedding. $\bar{\bar\theta}^* : C^\infty(\mathbb{R}^n/\bar\Gamma) \longrightarrow C^\infty(V/\Gamma) \mid \bar{\bar\theta}^*(f) = f \circ \bar{\bar\theta}$

は onto map になることが分かる。

<u>Lemma 4.3</u> $\bar{\bar{\theta}}^{**}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n/\bar{\Gamma}; \mathbb{R}^{n_1}/\bar{\Gamma}) \longrightarrow \mathcal{D}(V/\bar{\Gamma}; V_1/\bar{\Gamma})$

; $\bar{\bar{\theta}}^{**}(X)(\bar{\bar{\theta}}^{*}(f)) = X(f)\circ\bar{\bar{\theta}}$ $\quad (X\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n/\bar{\Gamma}; \mathbb{R}^{n_1}/\bar{\Gamma}),\ f\in C^\infty(\mathbb{R}^n/\bar{\Gamma}))$

は well defined Lie algebra homomorphism.

$\{\eta_1,\cdots,\eta_k\}$; $\mathbb{R}[\mathbb{R}^n]^{\bar{\Gamma}}_0$ の homogeneous minimal set of generators

$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_k): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$\{\eta_1^1,\cdots,\eta_{k_1}^1\}$: $\mathbb{R}[\mathbb{R}^{n_1}]^{\bar{\Gamma}}_0$ の homogeneous minimal set of generators

$q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ を natural projection とすると、$\eta_i = \eta_i^1\circ q$ $(i=1,\cdots,k_1)$ とできる。

$\eta^1=(\eta_1^1,\cdots,\eta_{k_1}^1)$; $\mathbb{R}^{n_1}\longrightarrow\mathbb{R}^{k_1}$

$\iota: (\eta(\theta(V)), \eta^1(\theta^1(V_1))) \hookrightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k_1})$ inclusion

$\iota^*: \mathcal{D}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^{k_1}) \longrightarrow \mathcal{D}(\eta(\theta(V)); \eta^1(\theta^1(V_1)))\cong\mathcal{D}(V/\Gamma, V_1/\Gamma)$

は epimorphic. 従って $\mathcal{D}(\eta(\theta(V)); \eta^1(\theta^1(V_1)))$ は $C^\infty(\mathbb{R}^k)$-module と考えられる。Schwarz [10], §6 と平行な議論により、$\mathcal{D}(\eta(\theta(V)); \eta^1(\theta^1(V_1)))$ に含まれる vector field の germ は $C^\infty(\mathbb{R}^k)$-module として、$\mathcal{D}(\eta(\theta(V)); \eta^1(\theta^1(V_1)))$ に含まれる real analytic な vector field の germ により生成されることが分かる。同様に $\mathcal{D}(\eta(\mathbb{R}^n); \eta^1(\mathbb{R}^{n_1}))$ に含まれる vector field の germ は $C^\infty(M)$-module として $\mathcal{D}(\eta(\mathbb{R}^n); \eta^1(\mathbb{R}^{n_1}))$ に含まれる real analytic な vector field の germ により生成さ

れることが証明される． $i_1 : \tau(\theta(V)) \hookrightarrow \tau(\mathbb{R}^n)$ を inclusion とすると，$i_1(\tau(\theta(V)))$ は $\tau(\mathbb{R}^n)$ の open set を含むことから，$i_1^*(\mathcal{D}(\tau(\mathbb{R}^n);\tau^1(\mathbb{R}^{n_1}))) = \mathcal{D}(\tau(\theta(V));\tau^1(\theta^1(V_1)))$ が示される．
従って

Proposition 4.4 $\bar{\theta}^{**} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n/\Gamma;\mathbb{R}^{n_1}/\Gamma) \longrightarrow \mathcal{D}(V/\Gamma;V_1/\Gamma)$ は onto Lie algebra homomorphism.

$\mathbb{R}^n/\Gamma$ は codim 1 strata を含まないことから，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n/\Gamma;\mathbb{R}^{n_1}/\Gamma) = \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n/\Gamma;\mathbb{R}^{n_1}/\Gamma)$． これから $\mathcal{D}(V/\Gamma;V_1/\Gamma)$ の maximal ideal の決定は $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n/\Gamma;\mathbb{R}^{n_1}/\Gamma)$ の maximal ideal の決定に帰着される． 従って §3 の方法により Th 4.1 を示すことができる．

§5. Filtration preserving vector fields

§3，§4 の結果は，~~部分環が~~ $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ C^∞-関数環上の module であることが証明の鍵になっている． そうでない場合に，このような結果を得ることは，より難しい問題となる． Omori [8] は，M, N が smooth manifold で $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ が transitive Lie algebra の場合に，多くの結果を得ている． しかし M, N が smooth orbifold の場合はこのような条件が望めない． $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ が $C^\infty(M)$, $C^\infty(N)$ 上の module でない場合の例として次の

結果を述べておく．

$p: E \longrightarrow B$ (resp $p': E' \longrightarrow B'$) を fibration over a connected smooth orbifold B (resp. B') とする．

$\mathfrak{D}_c(E;p)$: the Lie algebra of all smooth fibration preserving vector field with compact support.

$\mathfrak{X}_c(E;p) = \{X \in \mathfrak{D}_c(E;p) \mid X$ は strata preserving$\}$

Theorem 5.1 ([3]). リー環の同型 $\Phi: \mathfrak{X}_c(E;p) \longrightarrow \mathfrak{X}_c(E';p')$ が存在するならば，微分同相 $\varphi: E \longrightarrow E'$ が存在し，φ は fibration preserving で $d\varphi = \Phi$．

Theorem 5.2 リー環の同型 $\Phi: \mathfrak{D}_c(E;p) \longrightarrow \mathfrak{D}_c(E';p')$ が存在するならば，微分同相 $\varphi: E \longrightarrow E'$ が存在し，φ は fibration preserving で $d\varphi = \Phi$

References.

[1] K. Abe : Pursell-Shanks type theorem for orbit spaces of G-manifolds, P.R.I.M.S. 18 (1982).

[2] ______ : Pursell-Shanks type theorem for smooth orbifolds, preprint.

[3] ______ : On Lie algebras of fibration preserving

vector fields on fibrations over smooth orbifolds
, preprint.
[4] E. Bierstone : The Structure of Orbit Spaces and Singularities of Equivariant Mappings, Inst. De Math. Pura E Aplica (1980).
[5] A. Koriyama : On Lie algebras of vector fields with invariant submanifolds, Nagoya Math. J. 55 (1974)
[6] A. Koriyama, Y. Maeda, H. Omori : On Lie algebra of vector fields, Trans. A.M.S. 226 (1977)
[7] ______________________ : On Lie algebra of vector fields on expansive sets, Japan J. Math 3 (1977)
[8] H. Omori ; Infinite dimensional Lie transformation groups, Springer Lecture Note 427 (1974)
[9] L. Pursell, M. Shanks : The Lie algebra of vector fields of a smooth manifolds, Proc. A.M.S 5 (1954)
[10] G. Schwarz : Lifting smooth homotopies of orbit spaces, I.H.E.S. 51 (1980).